LEZIONE 4 25/9/2017

STRUMENTI PER IL CALCOLO DI LIMITI

1. Teoremi algebrici
2. Teoremi di confronto
3. Continuità
4. Limiti notevoli
5. Confronto fra ordini di infinito
6. Confronto fra ordini di infinitesimo
7. Cambi di variabile

Per usare 1 può essere indispensabile eseguire dei passaggi algebrici che trasformano l'espressione da studiare

Esempio 1 $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \quad \left(= \frac{0}{0}\right)$

Devo trovare identità algebriche che rimuovano le cause dell'indeterminazione del limite

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}$$

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$$a-b$$

$$=\frac{(\sqrt{1+x})^2-1^2}{x\cdot(\sqrt{1+x}+1)}$$

$$a=\sqrt{1+x} \qquad b=1$$

$$=\frac{\cancel{1}+x-\cancel{1}}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$$

per $x\to 0$ non ho difficoltà a calcolare il valore dell'espressione

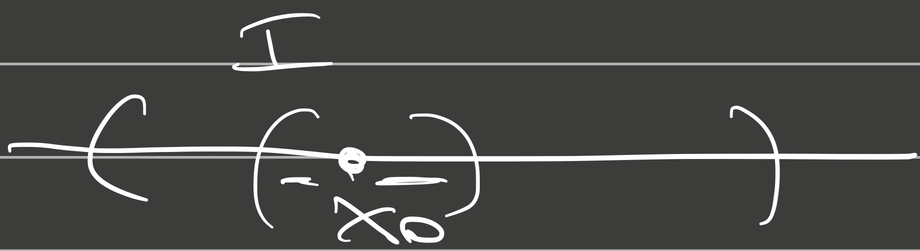
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}\longrightarrow\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{x}$$

Esercizio $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{3}$

Dimostrare che
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

CONTINUITA' Se $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo di $\mathbb{R}$ con $x_0 \in I$ punto interno. Diremo



che f è continua in x_0

se
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Esempio di funzione NON CONTINUA

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{|x|}, \qquad x_0 = 0$$

$$f(x)=\frac{x^2+x}{|x|}=\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{x} & \text{se } x>0\\[2ex] \dfrac{x^2+x}{-x} & \text{se } x<0\end{cases}$$

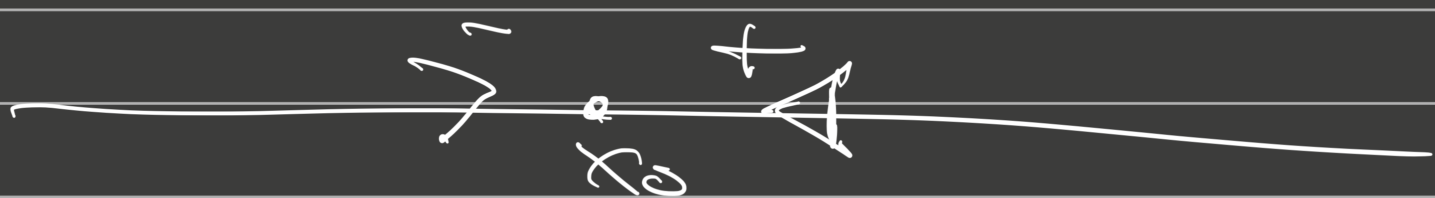
Ho semplicemente scritto la definizione di valore assoluto per rappresentare la funzione f

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{se } x>0\\ -(x+1) & \text{se } x<0\end{cases}$$

in $x_0=0$ f non è continua perché

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=+1\neq\lim_{x\to x_0^-} f(x)=-1$$

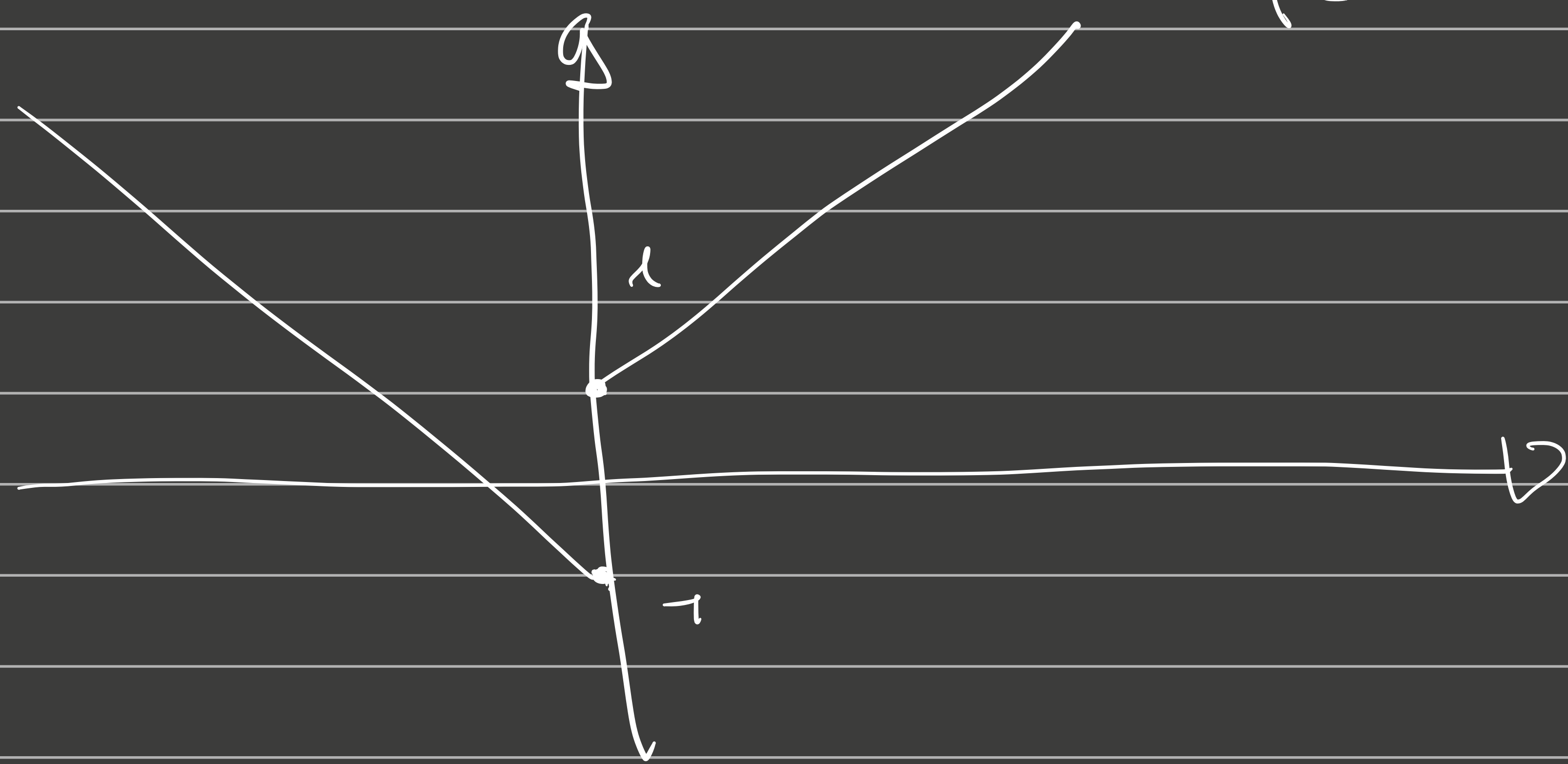
(mi avvicino a x_0 da valori $>$ di x_0)



Se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \in \mathbb{R}$

ma i due limiti sono diversi, la funzione ha una discontinuità nel punto x_0, che si dice SALTO

$f(x) = x+1$



La funzione dell'esempio (1)

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

Nel punto $x_0 = 0$ è "facilmente" non continua, ma siccome esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ (i due limiti a destra e a sinistra sono uguali) la discontinuità è detta

ELIMINABILE

(APPARENTE)

Tutti gli altri casi di non continuità si dicono

ESSENZIALI

Esempio $\quad f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad x_0 = 0$

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad x_0 = 0$$

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

OSSERVAZIONE

Avevamo "invertito" la funzione

$$f(x) = \frac{x}{1+x+x^2}$$

trovando due inverse destre, in particolare la funzione

$$g(y) = \frac{1-y-\sqrt{1-2y-3y^2}}{2y}$$

Tale funzione ha in $y_0 = 0$ una discontinuità apparente infatti:

$$\frac{1-y-\sqrt{1-2y-3y^2}}{2y} = \frac{(1-y)^2-(1-2y-3y^2)}{2y\left[(1-y)+\sqrt{1-2y-3y^2}\right]}$$

$$= \frac{\cancel{1}-\cancel{2y}+y^2\cancel{-1}+\cancel{2y}+3y^2}{2y\left[(1-y)+\sqrt{1-2y-3y^2}\right]} = \frac{2\cancel{4}y^2}{\cancel{2y}\left[\ldots\ldots\right]}$$

bla bla

$$\longrightarrow \frac{0}{2} = 0$$

LIMITI NOTEVOLI

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$e \notin \mathbb{Q} \qquad 2 < e < 3$

$e \simeq 2,718182 \ldots$

TEOREMA del confronto a 3

Siano f, g, h tre funzioni definite in un intorno di $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Supponiamo poi che valga $\forall x$ in tale intorno la disuguaglianza

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad (\bullet\bullet)$$

Inoltre supponiamo che esistano

$$l = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x)$$

con $l \in \mathbb{R}$. Allora anche $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$

Dimostrazione Fisso $\varepsilon > 0$ allora, supponendo $x_0 \in \mathbb{R}$ (la dimostrazione per $x_0 = \pm\infty$ per esercizio) ho che esiste $\delta > 0$ tale che se $\underbrace{0 < |x - x_0| < \delta}$ allora

(1) $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

(2) $|h(x) - \ell| < \varepsilon$

questo per l'ipotesi di esistenza del limite di f e di h per $x \to x_0$

Ricordando che $|a| < b \iff -b < a < b$

ho che

$$\underbrace{-\varepsilon}\overset{(1)}{<} f(x) - \ell \overset{..}{\leq} \underbrace{g(x) - \ell} \overset{..}{\leq} h(x) - \ell \overset{(2)}{<} \underbrace{\varepsilon}$$

quindi

$-\varepsilon < g(x) - \ell < \varepsilon \implies |g(x) - \ell| < \varepsilon$

quindi $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$

Usando il teorema del confronto e fra dimostriamo il limite notevole

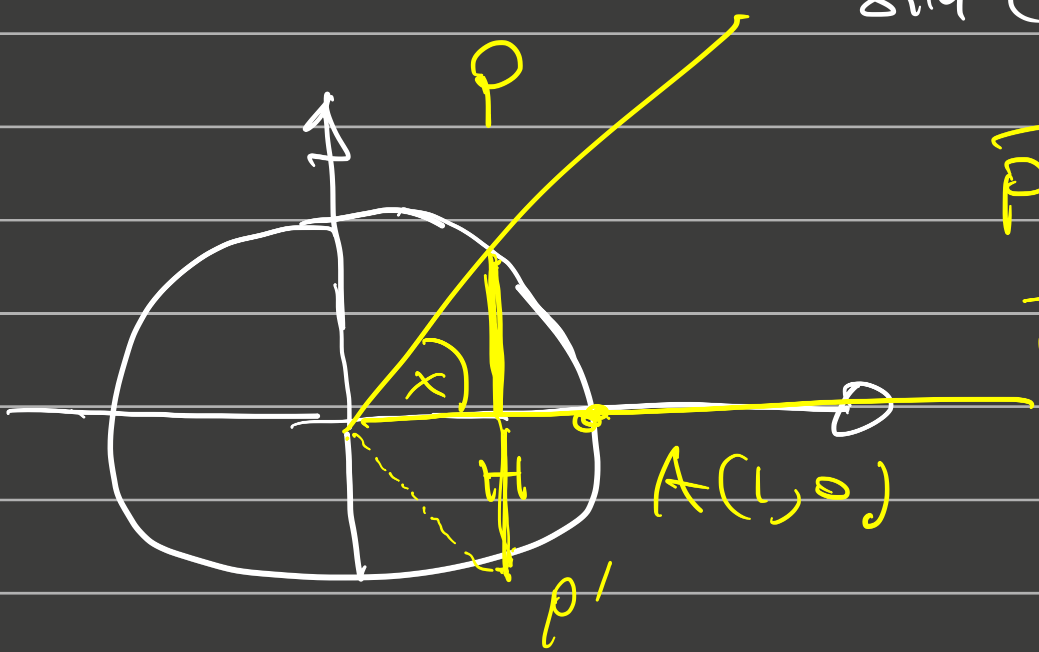
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Se $x\neq 0$ $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ osserviamo che f è una funzione PARI cioè tale per cui $\forall x\neq 0$

$$f(x)=f(-x)$$

Infatti: siccome $\sin x$ è funzione dispari e, quindi tale che

$$\sin(-x)=-\sin x$$



$$\overline{PH}=\sin x$$

$$\overline{P'H}=\sin(-x)=-\sin x$$

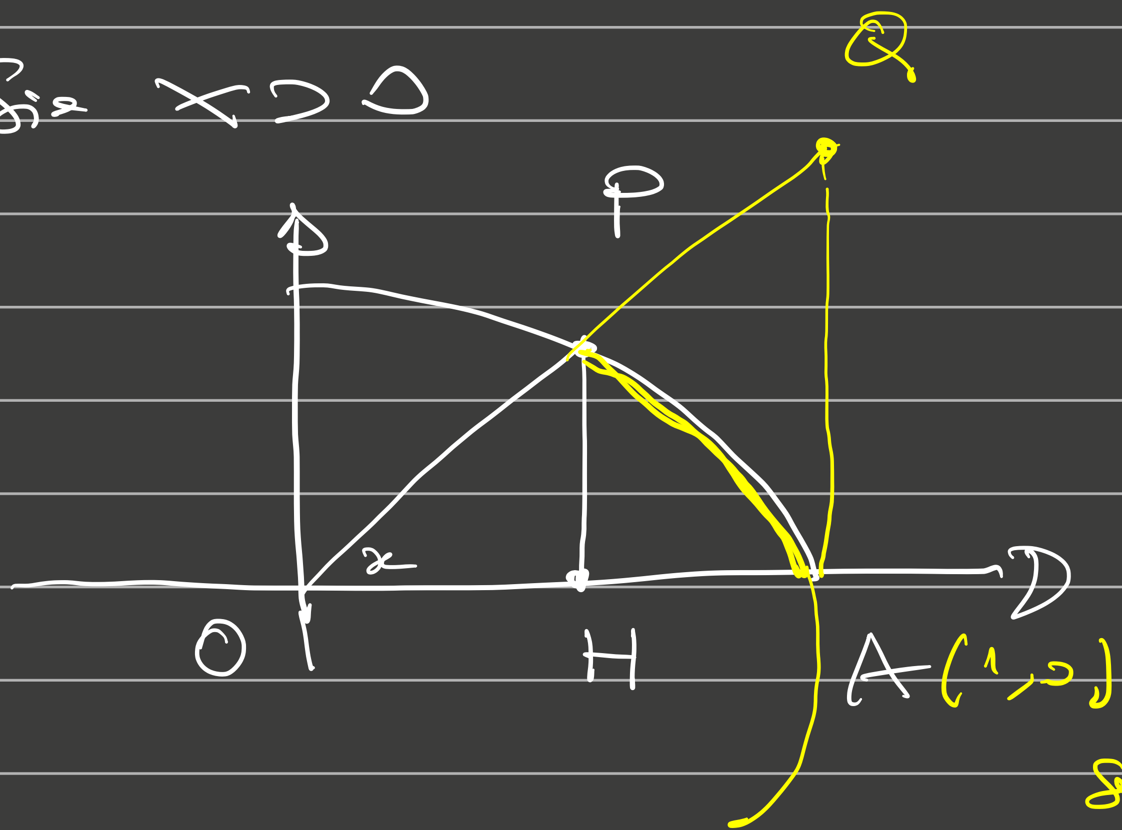
$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x}$$

$$= \frac{\sin x}{x} = f(x)$$

Se f è una funzione pari allora

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

Sia $x > 0$



$$\overline{PH} = \sin x$$

$$\overset{\frown}{PA} = x$$

$$\overline{QA} = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin x < x < \tan x \qquad (D)$$

se $x > 0$

Da (D) si scrive $\quad \sin x < x < \dfrac{\sin x}{\cos x} \quad$ (D')

Dovendo calcolare il limite per $x \to 0^+$ posso assumere che sia

$$\sin x > 0 \quad e \quad \cos x > 0$$

Allora in (D') posso dividere tutto per $\sin x$ senza alterare il verso della disuguaglianza

$$\underbrace{1}_{f(x)} < \frac{x}{\sin x} < \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{h(x) \to 1} \qquad x \to 0$$

perché cos è funzione continua

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

per il confronto a 3 che dà prova al limite notevole

Dal limite notevole

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

se ne deducono altri (da potremo nel seguito considerare come "notevoli")

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

In fatti: per esempio

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} = \boxed{\frac{\sin x}{x}} \cdot \frac{1}{\cos x} \to \frac{1}{1}$$

$x \to 0$

$\downarrow$

1

quindi $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

Poi $\frac{1 - \cos x}{x^2}$ per $x \to 0$ è nella forma $\frac{0}{0}$

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2 (1 + \cos x)}$$

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\cos x}$$

Perfetto

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$= \left(1^2 \cdot \frac{1}{1+\cos 0}\right)$$